Procedia of Theoretical and Applied Sciences
**International Symposium of Life Safety and Security**
ISSN: 2795-5621 Available: http://procedia.online/index.php/applied/index

# ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ФЕРМЫ

**М. М. Абдураимов**
канд. техн. наук.,доц. СамГАСИ

***Аннотация:*** В основе целевой функции находятся площади поперечного сечения стержней с одной стороны зависящие от геометрических параметров фермы, а с другой - от условий прочности или устой¬чивости стержней.

***Ключивые слова*:** оптимизации формы, геометрических параметров, условия симметрии, оптимизации, усилия.

К плоским стержневым системам относятся фермы. Наиболее простой конструкций является ферма, состоящая из стержней, шарнирно соединенных между собой. Одним из критериев поиска оптимальных параметров фермы является ее материалоемкость. Площадь поперечного сечения каждого стержня должна обеспечивать его устойчивую сопротивляемость продольным усилиям, возникающим под действием собственного веса фермы и полезной нагрузки, т.е. площадь сечения стержня является функцией от продольного усилия в стержне. Продольные усилия в стержнях в свою очередь зависят от формы фермы и ее собственного веса. Среди множества возможных геометрических схем фермы можно выбрать такую, которая имеет минимальный собственный вес и обеспечивает выполнение предъявляемых к ней условий и требований. Такой процесс оптимизации формы фермы можно обеспечить за счет варьирования ее различных геометрических параметров. Среди них кроме параметров формы могут быть параметры топологической организации геометрической схемы (число узлов, стержней или ячеек). Для нахождения оптимального результата необходимо составить и минимизировать целевую функцию, представляющую собой зависимость собственного веса или объема материала фермы от варьируемых параметров.

При составлении целевой функции используется идея, раскрытая в разделе на примере одного треугольника. Это идея состоит в следующем. Усилие в каждом стержне определяется как функция от площади поперечного сечения двояко: во-первых из условия равновесия системы под действием собственного веса и внешней нагрузки и во-вторых из условий прочности (для растянутых стержней) или устойчивости (для сжатых стержней). Приравнивая два значения одного и того же усилия, отвечающего различным критериям, получаем площадь поперечного сечения стержня как функцию от геометрических параметров фермы. Целевая функция представляет собой сумму объемов всех стержней (объем каждого стержня определяется как произведение длины стержня на площадь его поперечного сечения):

$$V = 2\sqrt{\frac{l^2}{(n+l)^2} + h^2} * \sum_{i+1}^{\frac{n+1}{2}} a^2_{i.i+1} + \frac{2l}{n+1}\left( a^2_{\frac{n+1}{2}\frac{n+5}{2}} + 2\sum_{i+1}^{\frac{n+1}{2}} a^2_{i.i+2} \right). \quad (1)$$

Отличие процесса составлений целевой функции для оптимизации геометрических параметров фермы из n ячеек от аналогичного процесса для одного треугольника состоит в определении усилий в стержнях. Каждая геометрическая схема фермы требует составления оригинального

Procedia of Theoretical and Applied Sciences
International Symposium of Life Safety and Security
ISSN: 2795-5621 Available: http://procedia.online/index.php/applied/index

аналитического алгоритма для определения усилий в стержнях. Поэтому процесс составления целевой функции рассмотрим на примере конкретной геометрической схемы фермы.

На рис.1 приведена геометрическая схема фермы из n ячеек в виде равнобедренных треугольников. Введем систему нумерации узлов фермы, позволяющую формально различать стержни нижнего и верхнего пояса и раскосы. Узлы нижнего пояса пронумеруем нечетными цифрами, а верхнего - четными, как показано на рис.1 Тогда любой параметр стержня нижнего пояса будет обозначаться соответствующей буквой с двумя нечетными индексами, например, усилие в стержне нижнего пояса $R_{zi,2i+2}$($l$=1, 2, 3, ..., (n+2)) параметр стержня верхнего пояса - буквой с двумя четными индексами, например, $R_{i,i+1}$($l$=1, 2, 3,.., (n+1)) .

В качестве переменных (проектных) параметров зададим высоту фермы h и число п ячеек фермы. Постоянными параметрами будем считать: пролет фермы 1, равенство длин стержней верхнего и нижнего пояса, равенство длин раскосов и внешнюю нагрузку Q на ферму, равномерно распределенную между узлами.

Реакции в опорах симметричной фермы равны полусумме собственного веса всех стержней и полезной нагрузки с противоположным знаком (рис. 1):

$$R_1 = P_{n+2} = \frac{-P' - P'' - Q}{2} \qquad (2)$$

где P' - суммарный вес стержней верхнего и нижнего пояса;

P'' - суммарный вес раскосов.

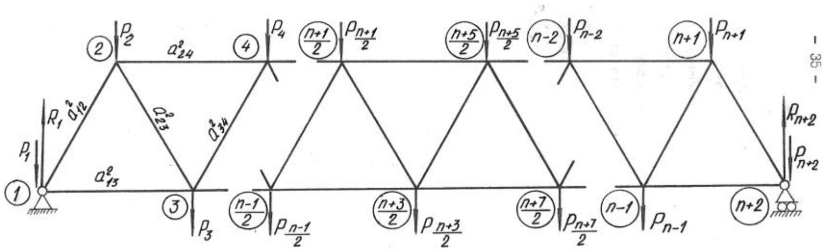

Рис. 1.

Собственный вес каждого стержня равен:

$$P_{i,j} = -a_{i,j}^2 l_{i,j} q \qquad (3)$$

где $a_{i,j}^2$ - площадь поперечного сечения стержня;

$l_{1,j}$ - длина стержня;

q- объемный вес материала.

Длина стержня верхнего или нижнего пояса равна: $\frac{2l}{n+1}$

где 1 - пролет фермы.

Вес стержней нижнего и верхнего пояса:

$$P' = \frac{2l}{n+1} q(a_{13}^2 + a_{24}^2 + \ldots + a_{n,n+2}^2) = \frac{2l}{n+1} q \sum_{i=1}^{n} a_{i,i+2}^2 \qquad (4)$$

Учитывая условия симметрии фермы, пределы изменения величины 1 можно сократить, записав формулу (4) для половины фермы и умножив ее на два:

Procedia of Theoretical and Applied Sciences
International Symposium of Life Safety and Security
ISSN: 2795-5621 Available: http://procedia.online/index.php/applied/index

$$P^{'} = \frac{4ql}{n+1}\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{i,i+2}^{2} \qquad (5)$$

Длина каждого раскоса определяется из прямоугольного треугольника, катеты которого соответственно равны высоте h фермы и половине длины одного стержня верхнего или нижнего пояса:

$$l_{pas} = \sqrt{\frac{l^2}{(n+1)^2} + h^2}, \qquad (6)$$

тогда по аналогии с (5) суммарный вес раскосов можно определить по формуле:

$$P^{"} = 2q\sqrt{\frac{l^2}{(n+1)^2} + h^2}\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{i,i+1}^{2} \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (2) получим значения реакций в опорах фермы:

$$R_1 = R_{n+2}\frac{2ql}{n+1}\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{i,i+2}^{2} - q\sqrt{\frac{l^2}{(n+1)^2} + h^2} * \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{i,i+1}^{2} - \frac{Q}{2}. \qquad (8)$$

Нагрузка на произвольный узел $M_i$ определяется как полусумма собственного веса примыкающих к узлу стержней плюс полезная нагрузка, разделенная на число узлов фермы:

$$P_1 = \frac{P_{i-1,i} + P_{i,i+1} + P_{i-2,i} + P_{i,i+2}}{2} + \frac{Q}{n+2}. \quad (9)$$

При подстановке (3) и (6) в (9) получаем нагрузку на произвольный узел, выраженную через площади поперечных сечений примыкающих к узлу стержней:

$$\begin{aligned} R_1 = \frac{-q}{2}(a_{i-1,i}^2 + a_{i,i+1}^2)\sqrt{\frac{l^2}{(n+1)^2} + h^2} - \\ -\frac{ql}{n+1}(a_{i-2,i}^2 + a_{i,i+2}^2) + \frac{Q}{n+2}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Имея нагрузку (1) на каждый узел фермы, величину реакции (2) в опоре можно определить и по другой формуле:

$$R_1 = R_{n+2} = -P_1 - P_2 - P_3 - \frac{P_{n+1}}{2} - \frac{\frac{P_{n+1}}{2}}{2} \qquad (11)$$

Усилия в раскосах фермы определяются методом вырезания узлов. Рассматривая многоугольники сил (рис. 2) последовательно вырезанных узлов фермы, можно заметить, что каждое последовательно определяемое усилие $R_{i,i+1}$ в раскосе пропорционально сумме вертикальных составляющих реакции в первой опоре и нагрузок на узлы, начиная с первого и заканчивая вырезаемым. Сжатые раскосы имеют нечетный индекс i, а растянутые - четный. Поэтому знак усилия в раскосе определяется как $(-1)^i$:

Procedia of Theoretical and Applied Sciences
**International Symposium of Life Safety and Security**
ISSN: 2795-5621 Available: http://procedia.online/index.php/applied/index

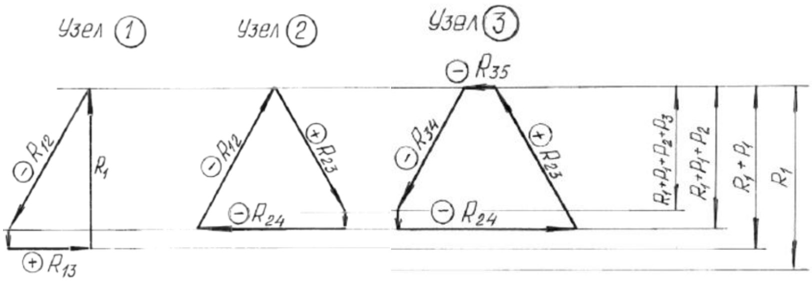


Рис. 2.

$$R_{i,i+1} = \frac{(-1)^i \left( R_1 + \sum_{i=1}^{i} P_j \right) \sqrt{\frac{1^2}{(n+1)^2} + h^2}.}{h} \qquad (12)$$

Подставляя (11) и (10) в (11) получаем значение усилия в произвольно выбранном раскосе, выраженное через геометрические параметры фермы:

$$R_{i,i+1} = \frac{(-1)^i}{h} \sqrt{\frac{l^2}{(n+1)^2} + h^2} \left( \frac{-q}{2} \sqrt{\frac{l^2}{(n+1)^2} h^2} \left( a^2_{i,i+1} + 2 \sum_{j=i+1}^{\frac{n+1}{2}} a^2_{i,i+1} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{ql}{(n+1)} \left( a^2_{i-1.i+1} + a^2_{i-.i+2} + \frac{a^2_{n+1}}{2} \frac{n+5}{2} + 2 \sum_{j=i+1}^{\frac{n+1}{2}} a^2_{i,j+2} \right) + \frac{Q(n+2_i+2)}{2(n+2)} \right). \qquad (13)$$

В такой же последовательности выводится формула для определения усилий в стержнях верхнего и нижнего поясов:

$$R_{i,i+2} = \frac{(-1)^{i+1}}{h(n+1)} \left( \frac{q}{2} \sqrt{\frac{1^2}{(n+1)^2} + h^2} \left( \sum_{j=1}^{i} (2j-1) a^2_{j,i+1} + 21 \sum_{j=i+1}^{\frac{n+1}{2}} a^2_{i,j+1} \right) + \right.$$
$$+ \frac{q1}{(n+1)} \left( 2 \sum_{j=1}^{i} j a^2_{j,i+2} + 21 \sum_{j=i+1}^{\frac{n+1}{2}} a^2_{i,j+2} a^2_{i,j+2} - 1 a^2_{\frac{a^2_{n+1}}{2} \frac{n+5}{2}} \right) + \qquad (14)$$
$$\left. + \frac{Q(n+2_i+2)}{2(n+2)} \right). \qquad (1.3.13)$$

Попарно приравнивая одноименные значения усилий в связах, рассчитанные соответственно по формулам (3), (4) и (13), (14), получим систему из n+1 нелинейных (квадратных) уравнений. Решением этой системы являются значения площадей $a^2_{1,1+1}$ и $a^2_{1,1+2}$ поперечных сечений всех стержней половины симметричной фермы, которые необходимо подставить в целевую функцию (1). Решение больших систем нелинейных уравнений является самостоятельным объектом исследований, который не входит в настоящую диссертацию. Поэтому рассмотрим более простой случай, когда все стержни делятся на четыре группы. Внутри каждой группы стержни принимаются одинаковыми, а площадь поперечного сечения $a_2$ рассчитывается для самого напряженного стержня. В первую группу входят сжатые стержни верхнего пояса, самым напряженным стержнем этой группы является в зависимости от числа ячеек фермы либо

Procedia of Theoretical and Applied Sciences
International Symposium of Life Safety and Security
ISSN: 2795-5621 Available: http://procedia.online/index.php/applied/index

центральный стержень, либо стержень, примыкающей к центральному узлу. Во вторую группу входят растянутые стержни нижнего пояса. Наиболее напряженным стержнем этой группы также является либо центральный стержень, либо стержень, примыкающей к центральному узлу. К третьей группе относятся сжатые раскосы, из которых наиболее напряженным является элемент с поперечным сечением $a^2_{1,2}$. К четвертой группе относятся растянутые раскосы. Наиболее напряженным раскосом этой группы является стержень с поперечным сечением $a^2_{2,3}$.

Так как положение наиболее, напряженных стержней верхнего и нижнего пояса зависит от числа п ячеек фермы, необходимо рассмотреть два варианта фермы.

Первый вариант фермы предполагает четное число стержней верхнего пояса и нечетное нижнего:

$$n = 4m + 1, \qquad (15)$$

где n - число ячеек фермы;

2m- число стержней верхнего пояса.

Наиболее напряженный стержень верхнего пояса имеет сечение $a^2_{\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2}}$ или $a^2_{2m+1,2m+3.}$ Наиболее напряженным стержнем нижнего пояса является центральный стержень с сечением $a^2_{\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2}}$

$a^2_{2m-1,2m+1.}$.

Второй вариант фермы предполагает нечетное число стержней верхнего пояса и четное - нижнего:

$$n = 4m - 1. \qquad (16)$$

Наиболее напряженным стержнем верхнего пояса является центральный, имеющий сечение $a^2_{\frac{n+1}{2},\frac{n+5}{2}}$ или $a^2_{2m,2m+2.}$. В нижнем поясе наиболее напряженный стержень примыкает к центральному узлу и имеет сечение $a^2_{\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2}}$ или $a^2_{2m-1,2m+1.}$.

Такое упрощение позволяет систему из n+1 нелинейных уравнений (в общем случае) свести к четырем уравнениям, из которых два - квадратные и два - линейные. Решение такой системы не представляет труда.

**Выводы.** Предложенный способ подсчета свободных параметров фермы при различных сочетаниях четырех условий равенства длин стержней различных групп позволяет варьировать число проектных параметров целевой функции при оптимизации геометрической формы фермы. В основе целевой функции находятся площади поперечного сечения стержней с одной стороны зависящие от геометрических параметров фермы, а с другой - от условий прочности или устойчивости стержней.

## ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Б.Ю.,Потопов В.Д. Основные теории упругости и пластичности. М,:Высшая школа, 1990, -с.245.
2. Абдураимов М.М. Статико-геометрических подход при формообразонии структурных систем со сложными очертаниями. Тезисы- конференции ’’Моделирование процессов и технологического оборудования в сельском хозяйстве”. Мелитополь, 1994 г. с.72.

Procedia of Theoretical and Applied Sciences
**International Symposium of Life Safety and Security**
ISSN: 2795-5621 Available: http://procedia.online/index.php/applied/index

3. Абдураимов М.М. Деяки пидвищення стойкости та жорсткости просторових систем на основы бионичних принципы в -В кн.: Прикладка геометрия та инженерна графика. -Киев: КДТУБА, 1994, вип. 56, с. I2I-I22.